Spezielle Relativitätstheorie

Überblick und Mathematik

sPhErE, 2013-10-10

powered by LaTeX

Relativistische Physik

- Spezielle Relativitätstheorie

- Allgemeine Relativitätstheorie

Relativistische Physik

- Spezielle Relativitätstheorie
  - revolutionär: neue Idee von Raum und Zeit, Vereinigung zur Raumzeit
- Allgemeine Relativitätstheorie

Relativistische Physik

- Spezielle Relativitätstheorie
  - revolutionär: neue Idee von Raum und Zeit, Vereinigung zur Raumzeit
  - beschreibt die Physik unter sehr hohen Geschwindigkeiten (nahe der des Lichts) zutreffend
- Allgemeine Relativitätstheorie

Relativistische Physik

- Spezielle Relativitätstheorie
  - revolutionär: neue Idee von Raum und Zeit, Vereinigung zur Raumzeit
  - beschreibt die Physik unter sehr hohen Geschwindigkeiten (nahe der des Lichts) zutreffend
- Allgemeine Relativitätstheorie
  - beschreibt die Raumzeit in der Nähe sehr großer Massen

Relativistische Physik

- Spezielle Relativitätstheorie
  - revolutionär: neue Idee von Raum und Zeit, Vereinigung zur Raumzeit
  - beschreibt die Physik unter sehr hohen Geschwindigkeiten (nahe der des Lichts) zutreffend
- Allgemeine Relativitätstheorie
  - beschreibt die Raumzeit in der Nähe sehr großer Massen
  - Theorie der Gravitation (erklärt sie als 5-dim. geometrisches Phänomen)

Relativistische Physik

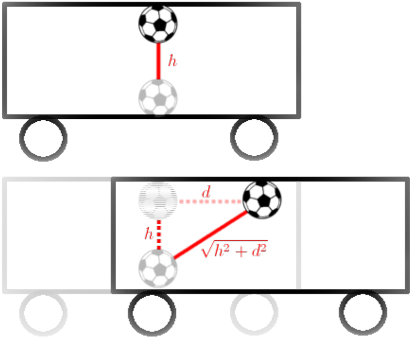
- Spezielle Relativitätstheorie
  - revolutionär: neue Idee von Raum und Zeit, Vereinigung zur Raumzeit
  - beschreibt die Physik unter sehr hohen Geschwindigkeiten (nahe der des Lichts) zutreffend
- Allgemeine Relativitätstheorie
  - beschreibt die Raumzeit in der Nähe sehr großer Massen
  - Theorie der Gravitation (erklärt sie als 5-dim. geometrisches Phänomen)
  - Krass anspruchsvoll

Warum?

- Problem: Bei hohen Geschwindigkeiten versagen die klassischen Modelle.
- Erkenntnis der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: entsprechende Widersprüche mit der klassischen Betrachtung

Relativitätsprinzip

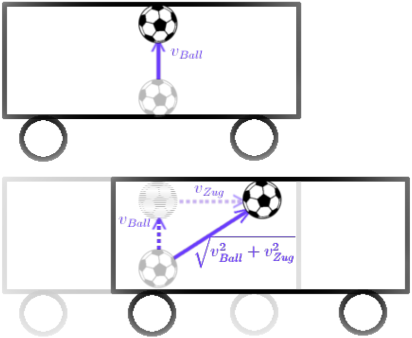
- Traditionelle Sicht: Raum und Zeit absolut, Geschwindigkeit hängt vom Beobachter ab.
- Klassisches Beispiel für Relativität: Ball wird im fahrenden Zug nach oben geworfen



- Für äußeren Beobachter legt Ball größere Strecke zurück als für Fahrgast.

Relativitätsprinzip

- Dafür misst er auch höhere Geschwindigkeit für den Ball:



- $\Rightarrow$ Beide Beobachter nehmen wieder das selbe Ereignis wahr.

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

- Einstein-Postulat 1905
- Elektromagnetische Wellengleichung:
$$\left(\Delta - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\begin{array}{c} E \\ B \end{array} \right) = 0$$
- Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$
- Experimentelle Bestätigung der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von einem „bevorzugten Bezugssystem“ (Michelson-Morley Versuch)

Konsequenzen für die klassische Sicht

- Widersprüche

- z.B. Verletzung der Invarianz einiger Größen unter der Galilei-Transformation, die u.a. besagt:

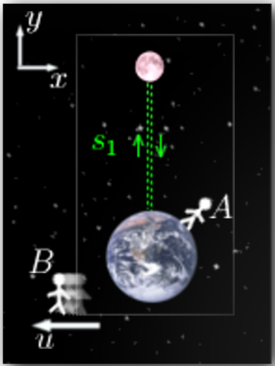
- Sei $x =$ Punkt in System A,
  $y =$ der Punkt in mit v wegbewegtem System B,
  dann gilt:

  $\dot{y} = \dot{x} - v$
  und Beobachter A und B sind sich einig über die Größen:
  Beschleunigung ($\ddot{y} = \ddot{x}$), Abstände ($y_1 - y_2 = x_1 - x_2$),
  Zeit ($t_y = t_x$)

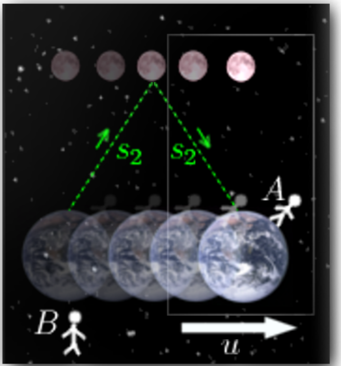
  (unter Annahme einer geradlinig-gleichförmigen Bewegung und wenn A und B abgeschlossene Inertialsysteme sind)

Verblüffende Folgen

- Zeitdilatation:
  - Bsp: Lasersignal Erde $\leftrightarrow$ Mond
  - Beobachter A in Ruhe, B fliegt mit u daran vorbei.

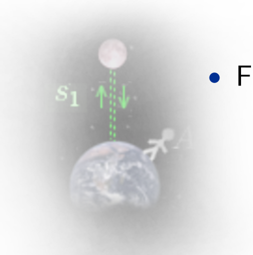


Sicht von A



Sicht von B

Verblüffende Folgen



- Für hin und zurück braucht das Licht für A: $t_A = \frac{2s_1}{c}$

- B sieht Weiterbewegung von Erde und Mond
  - $\Rightarrow$ Längerer Lichtweg $s_2 = \frac{ct_B}{2} \neq s_1$ bei gleicher Geschwindigkeit
  - $\Rightarrow$ Licht benötigt für B mehr Zeit, um den Wegunterschied auszugleichen.
  - Pythagoras: $s_1 = \sqrt{c^2 - u^2}\,\frac{t_B}{2}$

$$\Rightarrow t_B = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} t_A =: \gamma t_A$$

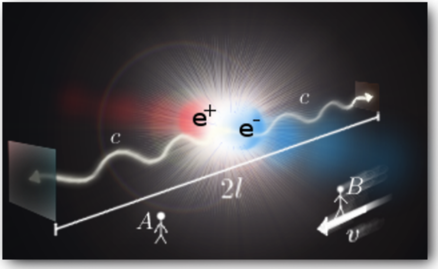
Verblüffende Folgen

- Jeder periodische Prozess ist eine Uhr.
- Das periodische Lasersignal bildet die exakteste mögliche Uhr: eine sog. Lichtuhr.
- B sieht den periodischen Prozess verlangsamt.

- $\Rightarrow$ *Bewegte Uhren gehen langsamer als (synchronisierte) Uhren im Ruhesystem.*

Verblüffende Folgen

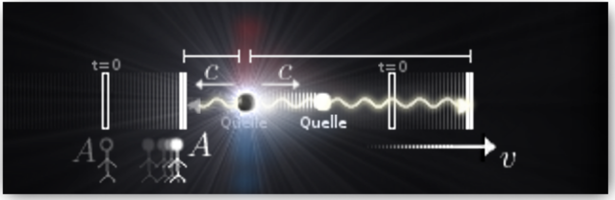
- Relativität der Gleichzeitigkeit
  - Bsp: Elektron und Positron zerstrahlen zu 2 Photonen. Diese treffen auf gleich weit entfernte Wände:



  - Beobachter A ruht, B bewegt sich parallel zur Abstandslinie mit v am Geschehen vorbei.
  - Für A kommen beide Signale gleichzeitig nach $t = \frac{l}{c}$ an.

Verblüffende Folgen

- Ereignis aus Perspektive von B:



- Photonen bewegen sich nicht mit der Relativgeschwindigkeit, sondern beide mit c.
- $\Rightarrow$ Das linke Signal braucht bis zur Wand weniger Zeit und das rechte mehr:
- $t'_{links} = \frac{l' - vt'_{links}}{c}$, also $t'_{links} = \frac{l'}{c+v} < \frac{l'}{c}$
- $t'_{rechts} = \frac{l'}{c-v} > \frac{l'}{c}$

Verblüffende Folgen

- *Synchrone Ereignisse an verschiedenen Orten eines Ruhesystems finden für einen relativ dazu bewegten Beobachter nicht mehr gleichzeitig statt.*

Verblüffende Folgen

- Längenkontraktion
  - Nach der Reflektion an den Wänden treffen die Photonen wieder zur Quelle.
  - Gleichzeitigkeit wieder gegeben:
    $$t_1' = \frac{l'}{c-v} + \frac{l'}{c+v} = \frac{l'}{c+v} + \frac{l'}{c-v} = t_2',$$
    m.a.W.:
    $$t_1' = \frac{2l'c}{c^2 - v^2} = \gamma^2 \frac{2l'}{c}$$
  - Erinnerung:
    t_1' muss gleich t_1, zeitgedehnt um $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}$ sein:
    $$t_1' = \gamma \frac{2l}{c}$$

Verblüffende Folgen

- Wir vergleichen:

$$t_1' = \gamma^2 \frac{2l'}{c} = \gamma \frac{2l}{c}$$

- Implikation:

$$l' = \frac{l}{\gamma}$$

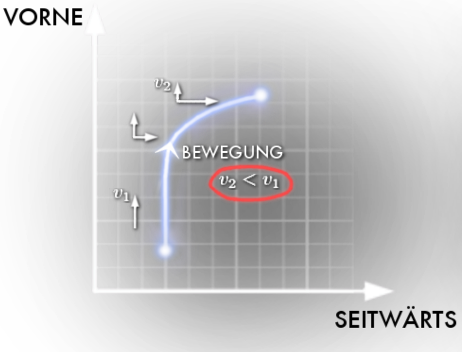
- $\Rightarrow$ *Bewegte Objekte schrumpfen, und zwar in Bewegungsrichtung.*
- *Die Länge von Abständen hängt vom Bezugsystem ab, in dem gemessen wird.*

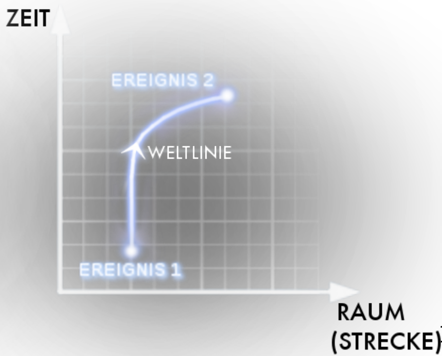
Verblüffende Folgen - Zusammenfassung

- Bsp.: Raumschiff bewegt sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit durchs All.
- Relativ dazu ruhender Beobachter sieht:
  - Zeitprozesse auf dem Raumschiff verlangsamt.
  - Raumschiff und alle Objekte an Bord schrumpfen in Bewegungsrichtung (Abstände verkürzen sich)
  - Massenzunahme ($\Rightarrow$ später)
  - Gleichzeitigkeit von Ereignissen im Raumschiff geht verloren.
- In allen besprochenen Fällen: Inertialsysteme

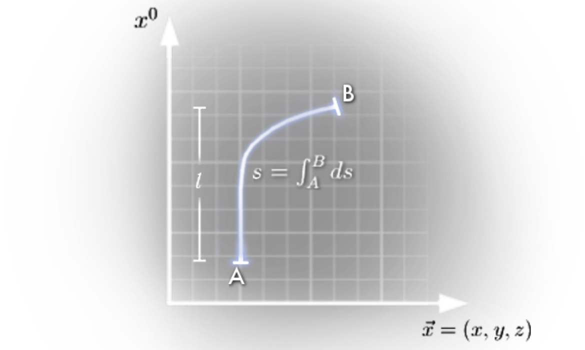
Neues Verständnis von Raum und Zeit

- „Raum“ und „Zeit“ keine universell gültigen Ordnungsgrößen mehr, sondern relativ.
- Raum und Zeit transformieren sich nicht unabhängig voneinander.
- „Zeit“ verhält sich zum 3-dim. „Raum“ wie Länge zu Breite:





Neues Verständnis von Raum und Zeit



- Schnellere Raumbewegung $\Rightarrow$ Abbremsung in der Zeit
- Zeit als weitere (vierte oder „nullte“) Raumdimension
  $x^0 = c \cdot t$ (durch die wir mit c – *Raumgeschw.* reisen)
- Ruhende Uhr: $l = c \cdot t$; Bewegte Uhr: $s := c \cdot \tau$ mit $\tau = \frac{t}{\gamma} < t$
- Ersatz der Galilei- durch „Lorentz-Invarianz“ (dazu später)
- *Vereinheitlichung von „Raum“ und „Zeit“ zur* ***Raumzeit***

4-dimensionale Raumzeit

- Euklidischer Raum: $\mathbb{R}^3$, 3D-Koordinaten $\vec{x} = (x, y, z)$
- Raumzeit:
  - $\mathbb{M}^4$, Vierervektor $x^\mu = (ct, x, y, z)$
  - Punkte auf der Raumzeit sind keine Orte, sondern Ereignisse.
  - Bahnkurven = „Weltlinien"
  - Vierergeschwindigkeit immer konstant, mit dem Wert c (lässt sich mathematisch zeigen)
  - Licht bewegt sich vollständig (mit c) durch den 3D-Raum $\Rightarrow$ Ruhe in der Zeitrichtung (für Licht vergeht keine Zeit!)
  - Überlichtschnelle Raumbewegung erforderte negative Geschw. in 4.Dimension, d.h. es müsste empfangen worden sein bevor es losgesendet würde ($\Rightarrow$ Kausalitätsbruch)

Lorentz-Invarianz:

- 2 unterschiedlich (gleichf.) bewegte Beobachter A und B sind sich über Kausalität von Ereignissen einig.
- Lorentz-Transformation von Ruhesystem in relativ dazu in z-Richtung bewegtes Inertialsystem:

$$y^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} x^\mu$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ und $\beta = \frac{v}{c}$

Geometrie der Raumzeit

- Metrik der Raumzeit (d.h. „*Abstands-Funktion*“, die 2 Vektoren auf eindeutigen Skalar abbildet)
  - ?
- Euklidische Metrik:
  - $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| =: \|\vec{z}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} z_i^2}$
  - („*Luftlinie*“ zw. 2 Punkten $\vec{x}$ und $\vec{y}$)
  - induziert durch Euklidische Norm („*Länge*“) des Differenzvektors

Geometrie der Raumzeit

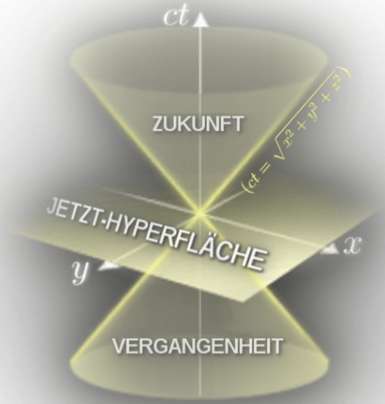
- Minkowski-Metrik der Raumzeit:
  - Betr. Skalarprodukt als Wirkung des metrischen Tensors g_{ij}:
    $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\vec{x})^T \cdot (g_{ij})_{i,j=1}^3 \cdot \vec{y}$
    Im $\mathbb{M}^n$ wie im $\mathbb{R}^n$ muss in unserem Fall
    $g_{\mu\nu} = diag(\mp 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ gelten
  - Im $\mathbb{M}^4$: Euklidische Norm $\|z^\mu\| = \sqrt{\sum_{i=0}^3 (z^i)^2}$
    des Differenzvektors z^μ nicht mehr lorentzinvariant!
  - Dafür aber der Ausdruck $-(x^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (x^i)^2$, d.h.
    Vorzeichenunterschied zw. zeitl. und örtlichem Abstand
  - Damit ist $g_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ und induziert die
  - *Minkowski-Norm*:
    $\|z^\mu\|_{\mathbb{M}} = \sqrt{\left| -(z^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (z^i)^2 \right|}$
    und die (uneigentliche) Metrik $d_{\mathbb{M}}(x^\mu, y^\mu) = \|x^\mu - y^\mu\|_{\mathbb{M}}$

Geometrie der Raumzeit

- Def. von Kausalität über Metrik:

Geometrie der Raumzeit

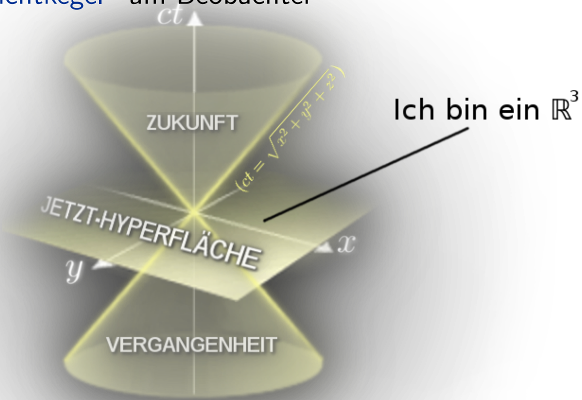
- Betrachte „Lichtkegel“ um Beobachter



- Grenze der mit lichtschnellem Signal erreichbaren Punkte.
- Vektor zw. 2 Ereignissen bildet Kausalitätsbeziehung.
  Ereignisse außerhalb: keine kausale Beziehung zum Ursprung

Geometrie der Raumzeit

- Betrachte „Lichtkegel“ um Beobachter

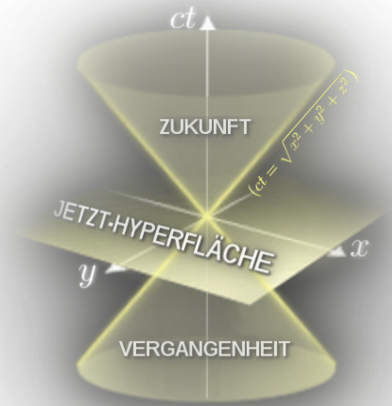


- Grenze der mit lichtschnellem Signal erreichbaren Punkte.
- Vektor zw. 2 Ereignissen bildet Kausalitätsbeziehung.

Geometrie der Raumzeit

- Zeitartige Vektoren
  - Zeitlicher Abstandsbetrag > Abstandsbetrag des Orts
  - $ct > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - liegen innerhalb des sog. Lichtkegels

Geometrie der Raumzeit

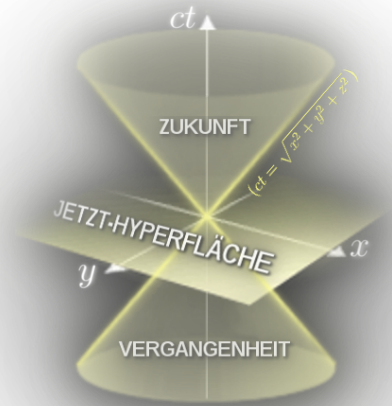


- Lichtartige Vektoren
  - Vektor liegt auf Lichtkegel
  - $ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Geometrie der Raumzeit

- Raumartige Vektoren
  - örtlicher Abstandsbetrag $>$ zeitlicher Abstandsbetrag
  - $ct < \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
  - Vektor liegt außerhalb $\Rightarrow$ Ereignis akausal mit dem Ursprung.

Geometrie der Raumzeit



- Lorentz-Transformationen lassen Metrik invariant: Kausalität von Ereignissen konstant, also für alle Beobachter erhalten.
  $=$ *Interpretation der* ***Lorentz-Invarianz***

Äquivalenz von Masse und Energie

- Klassischer Energiesatz:
  $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + V$ (Bewegungs- + potentielle Energie)
- Relativistische Gesamtenergie:
  - Newtonsches Axiom: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$
  - Ansatz: $\int \dot{\vec{p}} \frac{d\vec{x}}{dt} dt = \int \vec{F} \frac{d\vec{x}}{dt} dt$
- führt auf:
  $E = mc^2 + V$ mit $m = \gamma m_0$
- Bewegungsenergie ΔT äußert sich in Massenzunahme um
  $\Delta m = (\gamma - 1)m_0$, wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$
- Masse als Form von „*Ruheenergie*“:
  $m_0 = \frac{E}{c^2}$

Zusammenfassung

- Universelle Konstanz der Lichtgeschwindigkeit
- Lorentz-Transformation: Zeitdilatation, Längenkontraktion, Rel. der Gleichzeitigkeit
- Vereinheitlichte Raumzeit $x^\mu = (ct, x, y, z)$
- Lorentz-Invarianz: Erhaltung der Kausalität (Metrik)
- Äquivalenz von Masse und Energie $E = mc^2$, Massenzunahme

Fragen